

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记14——微积分第一基本定理

微积分第一基本定理

如果 $F'(x) = f(x)$ ，那么：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

如果将 F 用不定积分表示， $F = \int f(x)dx$ ，微积分第一基本定理可以看作是两个不定积分赋予特定的值，再用符号连接起来，计算具体的数值。

这里引入一个新符号：

$$F(b) - F(a) = F(x)|_a^b = F(x)|_{x=a}^{x=b}$$

于是：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

示例1

$$\begin{aligned} \int_a^b x^2 dx &=? \\ \int_a^b x^2 dx &= \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3} \\ \text{当 } a=0 \text{ 时,} \\ \int_0^b x^2 dx &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{b^3}{3} \end{aligned}$$

示例2

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{100} dx &=? \\ \int_0^1 x^{100} dx &= \frac{x^{101}}{101} \Big|_0^1 = \frac{1^{101}}{101} - \frac{0^{101}}{101} = \frac{1}{101} \end{aligned}$$

示例3

$f(x) = \sin x$ ，求下图阴影部分的面积

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程 (23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

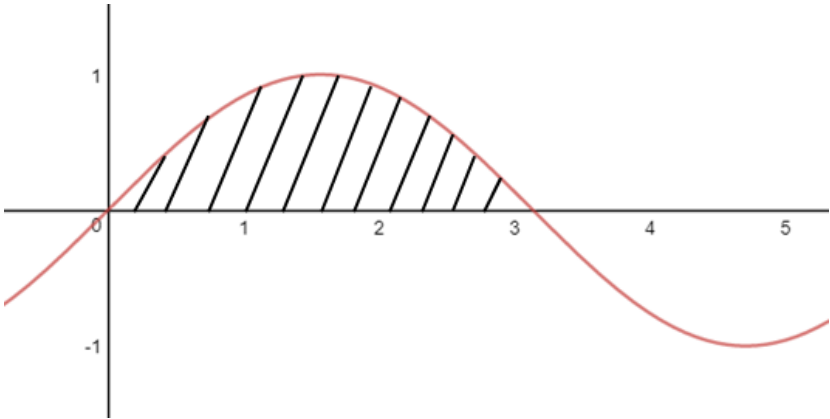
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人



这实际上是积分的几何意义。

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2$$

再看积分的几何意义

如果s = S(t)是距离关于时间的函数, 那瞬时速度就是S'(t) = ds/dt = V(t), 从时间a到时间b所经过的距离是:

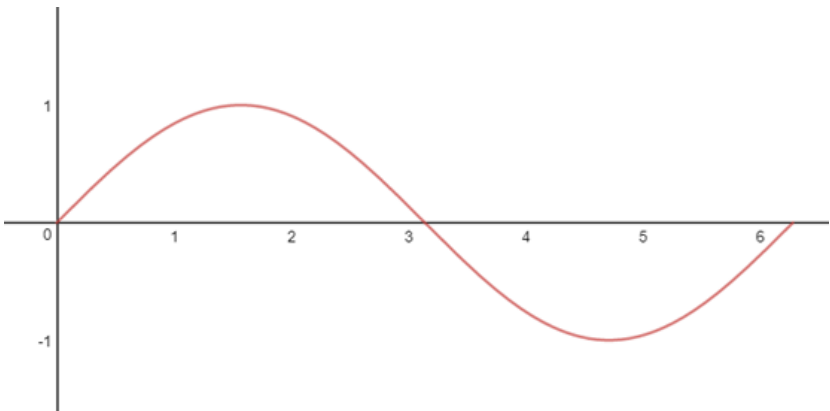
$$\int_a^b V(t) dt = S(b) - S(a)$$

dt = 1秒, 用黎曼和表示:

$$\int_a^b V(t) dt = \sum_{i=1}^{b-a} V(t_i) \Delta t$$

V(t)就是汽车仪表盘上的速度, $\int_a^b V(t) dt$ 就是行驶的里程。

如果行驶一段时间后掉头, 再回到出发点, 按照黎曼和表示法将会出现相反的速度, 最后的结果是0。这样看来, $\int_a^b V(t) dt$ 表示的就是位移而不是行驶里程, 其里程应当是 $\int_a^b |V(t)| dt$ 再来看一个例子, 曲线是sinx, 0 ≤ x ≤ 2π, 求曲线和x轴间两个驼峰的面积。



$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$$

这肯定不对了, 原因是上篇文章提到的概念: “ $\int_a^b f(x) dx$ 是 y=0,x=a,x=b,y=f(X)所围成图形的面积” 并不完全正确。当曲线在x轴上方

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

是，定积分才是面积；在下方是，面积（积分值）是负的。之前的几何解释是不完全的，它掩盖了某些事实，关于定积分真正的几何解释是：定积分是x轴上方的面积减去x轴下方的面积。

定积分的性质

$$1. \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$2. \int_a^b C f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$3. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$4. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$5. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$6. \text{ if } f(x) \leq g(x) \text{ and } a < b, \text{ then } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

定积分的换元法

变量替换是定积分的另一个性质，这个性质结合了不定积分的换元法（关于换元法的描述：[数学笔记11——微分和不定积分](#)）。定积分换元法性质：

$$u = u(x), \quad du = u'(x)dx$$

$$u_1 = u(x_1), \quad u_2 = u(x_2)$$

$$\int_{u_1}^{u_2} g(u)du = \int_{x_1}^{x_2} g(u(x))u'(x)dx$$

这个性质仅在 u' 在积分限上不变号时才有效，即 $u'(x)$ 和 $u(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上必须同号。

示例1

$$\int_1^2 (x^3 + 2)^5 x^2 dx = ?$$

$$u = x^3 + 2, \quad du = 3x^2 dx$$

$$u_1 = 1^3 + 2 = 3, \quad u_2 = 2^3 + 2 = 10$$

$$\int_1^2 (x^3 + 2)^5 x^2 dx = \int_{u_1}^{u_2} u^5 \frac{du}{3} = \frac{u^6}{18} \Big|_{u_1}^{u_2} = \frac{(10^6 - 3^6)}{18}$$

示例2

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = ?$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$$

这是正确答案。如果使用换元法：

$$u = x^2, \quad du = 2x dx, \quad dx = \frac{du}{2x} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$u_1 = 1^2 = 1, \quad u_2 = (-1)^2 = 1$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \int_{u_2}^{u_1} g(u) du = \int_1^1 g(u) du = 0$$

答案是错误的，其违反了定积分换元法的约束条件， $u = x^2$, $u' = 2x$ ，当 $x = -1$ 时， $u' = -2$ ，当 $x = 1$ 时， $u' = 2$ ， u' 不同号。对于此例， $du = 2x dx$ 实际上应该是 $dx = \pm u^{-1/2} du / 2$

再看第一定理

微积分第一基本定理：如果 $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

这是定理的标准形式，用 F 去解释 f 。现在换个角度，用 f 去理解 F ，可以写成：

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

仅仅是反过来写了一遍，但这种形式对以后的理解至关重要。现在，

$$\Delta F = F(b) - F(a), \quad \Delta x = b - a$$

$$\Delta F = \int_a^b f(x) dx$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

等式的右边可以看作 f 的均值：

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \text{Average}(f) = \text{Average}(F')$$

$$\Delta F = \text{Average}(F') \Delta x$$

average(f)需要用黎曼和解释。如果 $a = 0$, $b = n$, $\Delta x = 1$,

$$\text{Average}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n f(i) \approx \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx$$

等式左边是离散情况下的均值，右边是连续情况下的均值，如果是计算面积，右边要更加精确。如果用 $\Delta F = \text{Average}(F') \Delta x$ 理解第一基本定理，就是 F 的该变量等于其微小改变的平均值乘以流逝的时间。

中值定理

之前介绍过[中值定理](#)： $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $f(x)$ 在 (a, b) 内可导，且 $a < c < b$,

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c)$$

换成上一节的写法就是

$$\Delta F = F'(c)\Delta x$$

$F'(c)$ 是不确定的，而第一基本定理得到了一个确定的值。可以将中值定理看作第一基本定理的泛化，第一基本定理要比中值定理更“强”。事实上，只要能够使用第一基本定理，就不去使用中值定理。

既然是中值定理，就一定存在：

$$\min(F')\Delta x \leq \Delta F = F'(c)\Delta x \leq \max(F')\Delta x$$

第一基本定理与中值定理结合

$$\int_a^b \min(f) dx \leq \Delta F = \text{Average}(F')\Delta x = \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \max(f) dx, \\ a \leq c \leq b$$

示例

$F'(x) = 1/(1+x)$, $F(0) = 1$, $F(4)$ 的取值范围？

解法一：用中值定理求解

$$\Delta F = F'(c)\Delta x$$

$$F(4) - F(0) = \frac{1}{1+c}(4-0), \quad \Delta x = 4$$

$$c \in [0,4], \quad \frac{1}{5} \leq F'(c) \leq 1$$

$$\frac{1}{5}\Delta x \leq F'(c)\Delta x = F(4) - F(0) \leq 4\Delta x$$

$$\Delta x = 4, F(0) = 1 \Rightarrow \frac{4}{5} < F(4) < 5$$

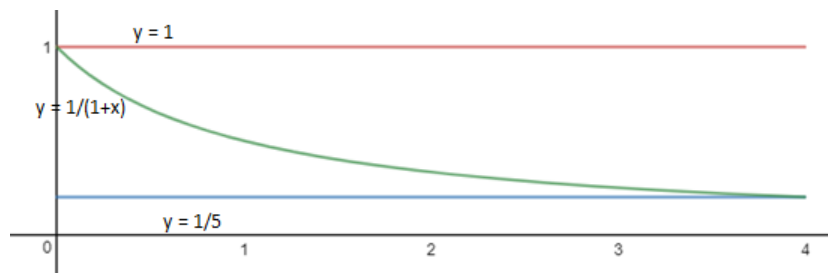
解法二：用微积分求解

$$F(4) - F(0) = \int_0^4 \frac{dx}{1+x}$$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+x} \leq \int_0^4 \frac{dx}{1+0} = 4, \quad \int_0^4 \frac{dx}{1+x} \geq \int_0^4 \frac{dx}{1+4} = \frac{4}{5}$$

综上, $4/5 < F(4) < 5$

可以用画图法理解微积分求解, $\int_0^4 dx$ 被积函数是 $y=1$, $\int_0^4 \frac{dx}{5}$ 被积函数是 $y=1/5$



如上图所示， $\int dx/(1+x)$ 计算的是 $y = 1/(1+x)$ 在 $[0,4]$ 内与x轴的面积；最大值和最小值是将曲线变成一个矩形，这可以看作是朴素的黎曼和。微积分之所以更加精确，正是因为将曲线分成了更多的矩形。

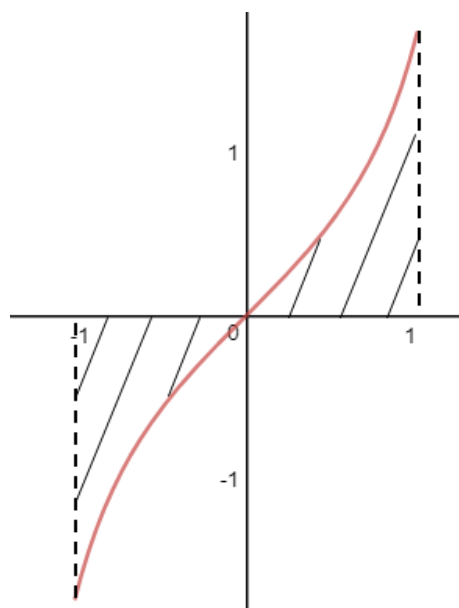
综合示例

示例1

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x dx = ? \quad \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \tan x dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x dx &= -\ln|\cos x| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= -\ln\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| - \left(-\ln\left|\cos\frac{\pi}{6}\right|\right) \\ &= -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} / \frac{1}{2}\right) \\ &= \ln\sqrt{3} \end{aligned}$$

第二个式子也可以用上述方法计算，但是可以使用更简单的方法直接得到答案。



如上图所示， $\tan x$ 在 $[-\pi/3, \pi/3]$ 上是关于原点对称的，根据定积分的几何意义，x轴上方的面积减去x轴下方的面积，故可以直接得出答案0。

注：

根据积分表, $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$, 也可以自行计算:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

利用换元法, 令 $u = \cos x, du = -\sin x dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln u + C = -\ln|\cos x| + C$$

示例2

$$\int_{-2}^2 x^2 \cos\left(\frac{x^3}{8}\right) dx = ?$$

$$u = \frac{x^3}{8}, du = \frac{3x^2}{8} dx, u_1 = \frac{2^3}{8} = 1, u_2 = \frac{(-2)^3}{8} = -1$$

$$\int_{-2}^2 x^2 \cos\left(\frac{x^3}{8}\right) dx = \int_{-1}^1 \frac{8}{3} \cos u du = \frac{8}{3} \sin u \Big|_{-1}^1 = \frac{16 \sin 1}{3}$$

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: 单变量微积分

标签: 微积分第一基本定理

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

推荐

0

反对

« 上一篇: (转) 已知 $1/\infty=0$, 求证 $1/0=\infty$

» 下一篇: 单变量微积分笔记15——微积分第二基本定理

posted on 2017-10-24 22:43 我是8位的 阅读(6089) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

yozodcs.com

广告 X

永中DCS_文档在线
预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间：2022年3月8日-3月18日

最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes